6 Trigonometrie

Die Grundlage der Trigonometrie sind die **Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten** in einem Dreieck. Die Grundaufgabe besteht darin, aus 3 gegebenen Größen eines Dreiecks (Seitenlängen oder Winkelgrößen) andere Werte in diesem Dreieck zu berechnen.

6.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Merke

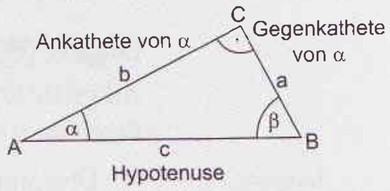
Sinus, Kosinus und Tangens

Der Sinus, der Kosinus und der Tangens eines Winkels werden durch die Seitenverhältnisse **im rechtwinkligen Dreieck** bestimmt:

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \cos\beta = \frac{a}{c}$

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \tan\beta = \frac{b}{a}$

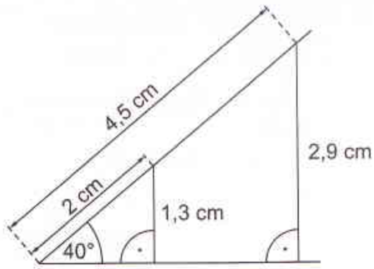


Beispiel

Bestimme zeichnerisch den Sinus von 40°, den Kosinus von 60° und den Tangens von 30°.

Lösung:

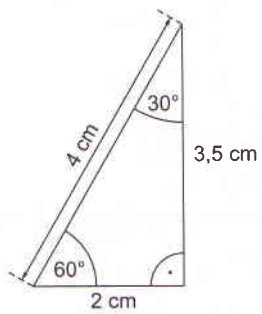
Man zeichnet rechtwinklige Dreiecke mit den angegebenen Winkeln, misst die Seiten und bestimmt die jeweiligen Seitenverhältnisse. Die Größe der Dreiecke ist beliebig, denn die Seitenverhältnisse bleiben immer gleich (Strahlensätze). Allerdings ergeben sich durch Messungenauigkeiten trotzdem leicht schwankende Werte.



$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin 40° = \frac{1{,}3}{2} \qquad \textbf{oder} \qquad \sin 40° = \frac{2{,}9}{4{,}5}$$

$$\sin 40° = 0{,}65 \qquad\qquad \sin 40° \approx 0{,}64$$



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos 60° = \frac{2}{4}$$

$$\cos 60° = 0{,}5$$

$$\tan\gamma = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan 30° = \frac{2}{3{,}5}$$

$$\tan 30° \approx 0{,}6$$

Achtung: Die Ankathete von γ ist nicht gleich der Ankathete von α.

Taschenrechner

Achte darauf, dass in deinem Taschenrechner der Modus DEG (=degree: dt. Grad) eingeschaltet ist.

- Gesucht ist der Sinus-, Kosinus- oder Tangenswert für einen Winkel.
  Aufgabe: $\sin 70° = ?$
  Eingabe: [SIN] 70 [=] **oder** 70 [SIN]
  Ausgabe: 0,93969262
  Ergebnis: $\sin 70° \approx 0{,}9397$
- Gesucht ist die Winkelgröße zu einem Sinus-, Kosinus- oder Tangenswert.
  Aufgabe: $\sin\alpha = 0{,}54$ $\alpha = ?$
  Eingabe: [SIN⁻¹] 0,54 [=] **oder** 0,54 [SHIFT] [SIN]
  Ausgabe: 32,68363885
  Ergebnis: $\alpha \approx 32{,}68°$

  Aufgabe: $\cos\alpha = \frac{4{,}7}{6{,}9}$ $\alpha = ?$
  Eingabe: [COS⁻¹] [(] 4,7 [÷] 6,9 [)] [=] **oder** 4,7 [÷] 6,9 [=] [SHIFT] [COS]
  Ausgabe: 47,0656892
  Ergebnis: $\alpha \approx 47{,}07°$

Beispiele

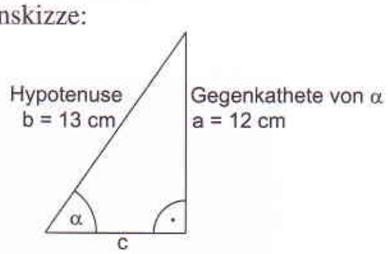
1. Überprüfe die zeichnerischen Ergebnisse aus obigem Beispiel mit dem Taschenrechner.

   Lösung:
   $\sin 40° \approx 0{,}6428$
   $\cos 60° = 0{,}5$
   $\tan 30° \approx 0{,}5774$

2. Gegeben: $\beta = 90°$; $a = 12$ cm; $b = 13$ cm
   Gesucht: α

   Lösung:
   $$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
   $$\sin\alpha = \frac{12}{13}$$
   $$\alpha \approx 67{,}38°$$

   Planskizze:



Aufgaben

119 Bestimme die zugehörigen Winkelgrößen.
a) $\sin\alpha = 0{,}67$ b) $\cos\beta = 0{,}99$ c) $\tan\delta = 5{,}5$

120 a) Warum können Sinus- und Kosinuswerte nicht größer als 1 werden?
b) Warum ist der Tangens von 45° genau 1?

Merke

Sind von einem **rechtwinkligen Dreieck** neben dem rechten Winkel weitere **2 Größen** bekannt, darunter mindestens eine Seite (Seite + Winkel oder Seite + Seite), kann man mithilfe
- von Sinus, Kosinus oder Tangens
- des Satzes des Pythagoras
- der Winkelsumme im Dreieck

alle weiteren Größen dieses Dreiecks bestimmen.

Beispiele

1. Gegeben: $\alpha = 90°$; $\gamma = 39°$; $b = 14$ cm
   Gesucht: β, a, c, h_a, A

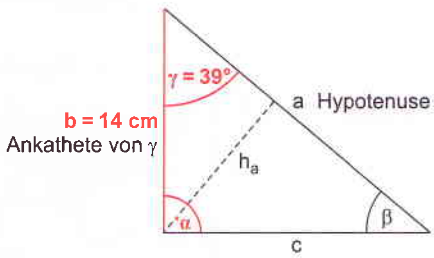
   Lösung:
   - Berechnung von Winkel β:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \text{Winkelsumme im Dreieck}$$
$$90° + \beta + 39° = 180° \quad |-90° \quad |-39°$$
$$\beta = 51°$$

   - Berechnung der Hypotenuse a:

$$\cos 39° = \frac{14}{a} \quad |\cdot a$$
$$a \cdot \cos 39° = 14 \quad |: \cos 39°$$
$$a = \frac{14}{\cos 39°}$$
$$a \approx 18{,}01$$

Planskizze:



   - Berechnung der Kathete c:

$$\sin 39° = \frac{c}{18{,}01} \quad |\cdot 18{,}01$$
$$\sin 39° \cdot 18{,}01 = c$$
$$c \approx 11{,}33$$

oder

$$\cos 51° = \frac{c}{18{,}01} \quad |\cdot 18{,}01$$
$$18{,}01 \cdot \cos 51° = c$$
$$c \approx 11{,}33$$

oder

$$\tan 51° = \frac{14}{c} \quad |\cdot c$$
$$c \cdot \tan 51° = 14 \quad |: \tan 51°$$
$$c = \frac{14}{\tan 51°}$$
$$c \approx 11{,}34$$

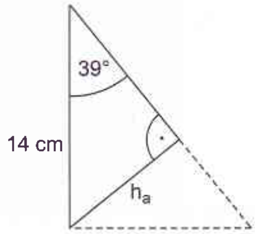
oder

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad \text{Satz des Pythagoras}$$
$$c^2 + 14^2 = 18{,}01^2 \quad |-14^2$$
$$c^2 = 18{,}01^2 - 14^2$$
$$c^2 = 128{,}3601 \quad |\sqrt{}$$
$$c \approx 11{,}33$$

- Berechnung von h_a:

$$\sin 39° = \frac{h_a}{14} \quad | \cdot 14$$
$$\sin 39° \cdot 14 = h_a$$
$$h_a \approx 8{,}81$$

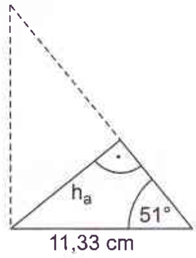
Planskizze:



oder

$$\sin 51° = \frac{h_a}{11{,}33} \quad | \cdot 11{,}33$$
$$\sin 51° \cdot 11{,}33 = h_a$$
$$h_a \approx 8{,}81$$

Planskizze:



- Berechnung des Flächeninhaltes A:

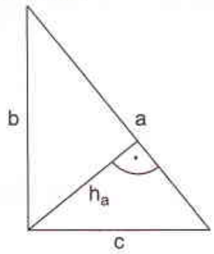
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{b \cdot c}{2} \quad \textbf{oder} \quad A = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$A = \frac{14 \cdot 11{,}33}{2} \qquad A = \frac{18{,}01 \cdot 8{,}81}{2}$$

$$A = 79{,}31 \qquad A \approx 79{,}33$$

Planskizze:



(Unterschiedliche Ergebnisse entstehen durch Rechnung mit gerundeten Werten)

Ergebnis: $\beta = 51°$; $a = 18{,}01$ cm; $c = 11{,}33$ cm; $h_a = 8{,}81$ cm; $A = 79{,}31$ cm^2

2. Die Steigung einer Straße wird in der Regel in Prozent angegeben.
Die Angabe 12 % $\left(= \frac{12}{100}\right)$ auf dem abgebildeten Verkehrsschild bedeutet, dass pro 100 m in waagerechter Richtung die Höhe der Straße um 12 m zunimmt.
Bestimme den Steigungswinkel der Straße.

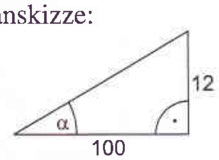
Lösung:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan \alpha = \frac{12}{100}$$

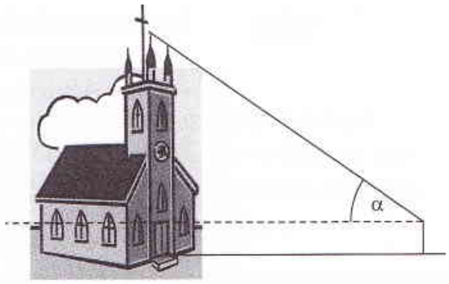
$$\alpha \approx 6{,}84°$$

Planskizze:



Der Steigungswinkel beträgt 6,84°.

3. Ein Theodolit (Winkelmessgerät) wird mit einem Abstand von 85 m vor einer Kirche aufgestellt. Man peilt in Augenhöhe (1,8 m über dem Erdboden) die Kirchturmspitze unter einem Höhenwinkel (Winkel, der von der Horizontalen aufwärts gemessen wird) $\alpha = 41{,}5°$ an.
Wie hoch ist der Kirchturm?



Lösung:

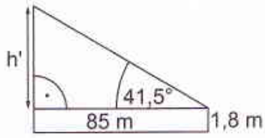
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan 41{,}5° = \frac{h'}{85} \quad \Big| \cdot 85$$

$$\tan 41{,}5° \cdot 85 = h'$$

$$h' \approx 75{,}2$$

Planskizze:



Höhe des Turms:

$h = h' + 1{,}8$

$h = 75{,}2 + 1{,}8$

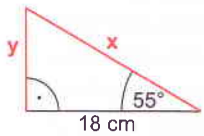
$h = 77$

Der Turm ist 77 m hoch.

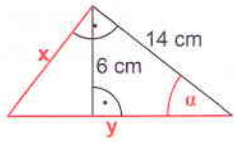
Aufgaben

121 Bestimme in den Figuren die rot markierten Seiten und Winkel.

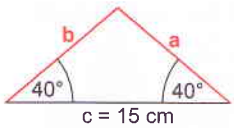
a)



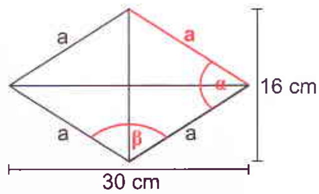
b)



c)



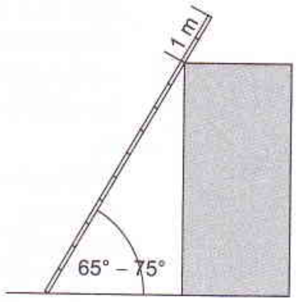
d)



122 Lena kommt aus den Skiferien in Oberammergau zurück und erzählt ihrer Klasse stolz, dass sie den Laber-Nordhang, eine der steilsten Abfahrten Deutschlands mit einem Gefälle von 84 %, hinuntergefahren ist. Clemens sagt: „Das kann nicht stimmen, das sind ja fast 100 % und somit wäre der Steigungswinkel fast 90°!“
Hat Lena geschwindelt?

123 In den Sicherheitshinweisen der Feuerwehr heißt es:
- Leitern sind mit einem Neigungswinkel von 65° bis 75° zur Standfläche aufzustellen.
- Über Austrittsstellen müssen Leitern mindestens 1 m herausragen.

a) Weise durch eine Rechnung nach, dass eine 5,35 m lange Leiter ausreicht, wenn ein Feuerwehrmann das Dach einer 4,20 m hohen Halle besteigen möchte.



b) In welcher Entfernung von der Hallenwand muss der Feuerwehrmann das untere Ende der 5,35 m langen Leiter aufstellen?
Kreuze an!

☐ 1,9 m ☐ 1,55 m ☐ 1,13 m

124 Ein gleichschenkliges Trapez hat die Seitenlänge $a = 19$ cm, $c = 10$ cm und $b = d = 8$ cm. Ermittle alle Winkelgrößen und den Flächeninhalt.

125 Jakob steht in 207 m Höhe auf dem Berliner Fernsehturm am Alexanderplatz. Er peilt mit einem Winkelmessgerät die Spitze des 146 m hohen Funkturmes in Charlottenburg unter einem Tiefenwinkel (Winkel, der von der Horizontalen abwärts gemessen wird) von 0,33° an.
Wie weit sind die beiden höchsten Gebäude der Stadt voneinander entfernt?

6.2 Berechnungen an beliebigen Dreiecken – Sinus- und Kosinussatz

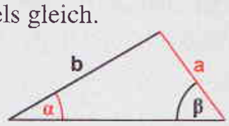
Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens sind direkt nur in rechtwinkligen Dreiecken anwendbar. Rechte Winkel sind aber nicht in allen Dreiecken vorhanden und lassen sich auch nicht immer durch Zerlegungen herstellen. Mit dem **Sinussatz** und dem **Kosinussatz** kann man Berechnungen **im allgemeinen Dreieck** durchführen.

Merke

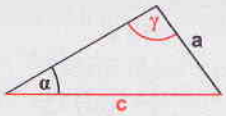
Sinussatz

In jedem Dreieck sind die Verhältnisse aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert des gegenüberliegenden Winkels gleich.

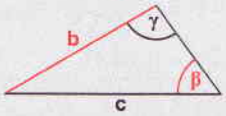
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Beispiele

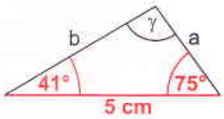
1. Gegeben: $\alpha = 41°$; $\beta = 75°$; $c = 5$ cm
   Gesucht: γ; a; b

   Lösung:

   Man sucht zuerst ein gegebenes Seite-Winkel-Paar (Seite mit gegenüberliegendem Winkel). Ist es nicht vorhanden, bestimmt man den fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck.

   $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 41° - 75° = 64°$

   Planskizze:

   Berechnung von a:

   $$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

   $$\frac{5}{\sin 64°} = \frac{a}{\sin 41°} \quad |\cdot \sin 41°$$

   $$\frac{5 \cdot \sin 41°}{\sin 64°} = a$$

   $$a \approx 3{,}65$$

   Berechnung von b:

   $$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

   $$\frac{5}{\sin 64°} = \frac{b}{\sin 75°} \quad |\cdot \sin 75°$$

   $$\frac{5 \cdot \sin 75°}{\sin 64°} = b$$

   $$b \approx 5{,}37$$

   oder

   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

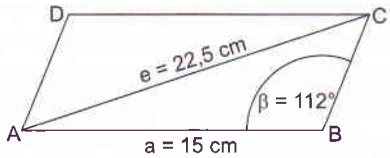
   $$\frac{3{,}65}{\sin 41°} = \frac{b}{\sin 75°} \quad |\cdot \sin 75°$$

   $$\frac{3{,}65 \cdot \sin 75°}{\sin 41°} = b$$

   $$b \approx 5{,}37$$

   Ergebnis: $\gamma = 64°$; $a = 3{,}65$ cm; $b = 5{,}37$ cm

2. Berechne den Umfang des Parallelogramms ABCD.



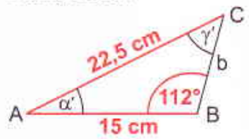
Lösung:

Gesucht ist die Seite b.

Das gegebene Seite-Winkel-Paar ist $\frac{22{,}5}{\sin 112°}$.

Man bestimmt zuerst γ', weil die Seitenlänge 15 cm gegeben ist, danach α' über die Winkelsumme im Dreieck und schließlich die gegenüberliegende Seite b.

Planskizze:



Berechnung von γ':

$$\frac{22{,}5}{\sin 112°} = \frac{15}{\sin\gamma'} \qquad |\cdot\sin\gamma' \quad |\cdot\sin 112°$$

$$22{,}5\cdot\sin\gamma' = 15\cdot\sin 112° \qquad |:22{,}5$$

$$\sin\gamma' = \frac{15\cdot\sin 112°}{22{,}5}$$

$$\sin\gamma' \approx 0{,}6181\ldots$$

$$\gamma' \approx 38{,}18°$$

Berechnung von α':

$\alpha' = 180° - 112° - 38{,}18°$

$\alpha' = 29{,}82°$

Berechnung von b:

$$\frac{22{,}5}{\sin 112°} = \frac{b}{\sin 29{,}82°} \qquad |\cdot\sin 29{,}82°$$

$$\frac{22{,}5\cdot\sin 29{,}82°}{\sin 112°} = b$$

$$b \approx 12{,}07$$

oder

$$\frac{15}{\sin 38{,}18°} = \frac{b}{\sin 29{,}82°} \qquad |\cdot\sin 29{,}82°$$

$$\frac{15\cdot\sin 29{,}82°}{\sin 38{,}18°} = b$$

$$b \approx 12{,}07$$

Berechnung des Umfangs:

$u = 2a + 2b$

$u = 2\cdot 15 + 2\cdot 12{,}07$

$u = 54{,}14$

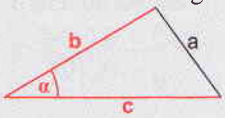
Der Umfang des Parallelogramms beträgt 54,14 cm.

Merke

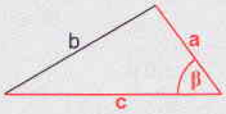
Kosinussatz

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer beliebigen Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, vermindert um das Doppelte des Produkts aus diesen Seitenlängen und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

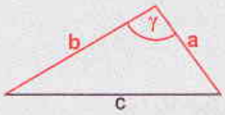
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$



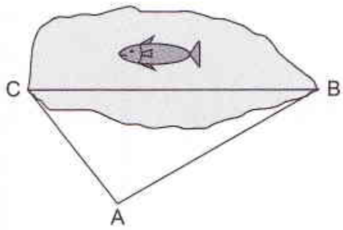
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$



Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras:
Ist der eingeschlossene Winkel 90°, so wird der Kosinuswert 0. Damit erhält man:
$a^2 = b^2 + c^2$ bzw. $b^2 = a^2 + c^2$ bzw. $c^2 = a^2 + b^2$

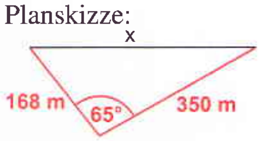
Beispiele

1. Um die Länge eines Sees zu bestimmen, misst man die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und den Winkel CAB:
   $\overline{AB} = 350$ m
   $\overline{AC} = 168$ m
   $\sphericalangle CAB = 65°$
   Wie lang ist der See?



   Lösung:
   Aus zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmt man die Länge der dritten Seite.

Planskizze:

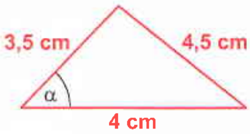


   $x^2 = 168^2 + 350^2 - 2 \cdot 168 \cdot 350 \cdot \cos 65°$
   $x^2 \approx 28\,224 + 122\,500 - 49\,699{,}91$
   $x^2 = 101\,024{,}09 \quad |\sqrt{\ }$
   $x \approx 317{,}84$
   Der See ist ca. 318 m lang.

2. Berechne die Winkel im Dreieck mit den Seitenlängen a = 4,5 cm, b = 3,5 cm und c = 4 cm.
   Konstruiere anschließend das Dreieck und überprüfe die Werte.

   Lösung:
   Bei 3 gegebenen Seiten muss man sich entscheiden, welchen der eingeschlossenen Winkel man zuerst berechnen möchte.

Planskizze:



   Bestimmung von α:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \\
4{,}5^2 &= 3{,}5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 4 \cdot \cos\alpha \qquad |-3{,}5^2 \quad |-4^2 \\
4{,}5^2 - 3{,}5^2 - 4^2 &= -2 \cdot 3{,}5 \cdot 4 \cdot \cos\alpha \\
-8 &= -28 \cdot \cos\alpha \qquad |:(-28) \\
\cos\alpha &= 0{,}2857\ldots \\
\alpha &\approx 73{,}40°
\end{aligned}
$$

Berechnung von β:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \\ 3{,}5^2 &= 4{,}5^2+4^2-2\cdot 4{,}5\cdot 4\cdot\cos\beta \qquad |-4{,}5^2 \quad |-4^2 \\ 3{,}5^2-4{,}5^2-4^2 &= -2\cdot 4{,}5\cdot 4\cdot\cos\beta \\ -24 &= -36\cdot\cos\beta \qquad |:(-36) \\ \cos\beta &= 0{,}6666\ldots \\ \beta &\approx 48{,}19° \end{aligned}$$

oder

$$\frac{4{,}5}{\sin 73{,}4°}=\frac{3{,}5}{\sin\beta} \qquad |\cdot\sin 73{,}4° \quad |\cdot\sin\beta$$

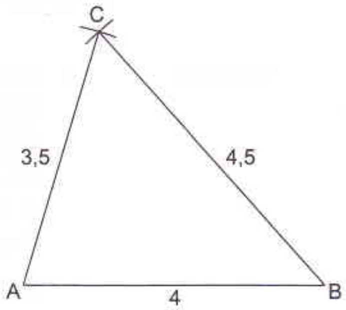
Sinussatz

$$\begin{aligned} 4{,}5\cdot\sin\beta &= 3{,}5\cdot\sin 73{,}4° \qquad |:4{,}5 \\ \sin\beta &= \frac{3{,}5\cdot\sin 73{,}4°}{4{,}5} \\ \sin\beta &= 0{,}7453\ldots \\ \beta &\approx 48{,}19° \end{aligned}$$

$\gamma=180°-73{,}40°-48{,}19°$
$\gamma=58{,}41°$

Konstruktion des Dreiecks:

- $c=\overline{AB}=4$ cm zeichnen
- Kreisbogen um A mit $r=3{,}5$ cm
- Kreisbogen um B mit $r=4{,}5$ cm
- Schnittpunkt der Kreisbögen ist C



Winkel messen: $\alpha=73°$; $\beta=48°$; $\gamma=59°$
Die Winkelgrößen stimmen mit den berechneten Werten überein.

Sinussatz oder Kosinussatz – das ist die Frage

Merke

Sinussatz oder Kosinussatz – das ist die Frage

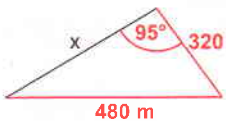
Sind von einem beliebigen Dreieck 3 Größen bekannt, so ist es vor der Berechnung weiterer Größen von Vorteil, sich zunächst zu überlegen, welcher Fall vorliegt:

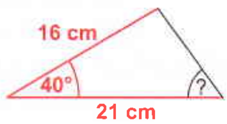
Gegeben	Kurz	Wähle
3 Seiten	SSS	Kosinussatz
2 Seiten und der eingeschlossenen Winkel	SWS	Kosinussatz

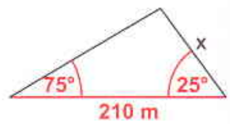
In **allen anderen Fällen** (WSW, SSW) verwendet man den Sinussatz (evtl. mithilfe der Winkelsumme).

Beispiel

Sinussatz oder Kosinussatz? Welchen Satz wendest du in den folgenden Fällen für die erste Berechnung an?

a) 

b) 

c) 

Lösung:

a) Gegeben: SSW $\rightarrow$ Sinussatz

Ansatz:

$$\frac{480}{\sin 95^\circ} = \frac{320}{\sin \alpha}$$

Bestimme dann β über die Winkelsumme und berechne x mit dem Sinus- oder dem Kosinussatz. $(\text{Ergebnisse: } \alpha = 41{,}62°; \beta = 43{,}38°; x = 330{,}94 \text{ m})$

b) Gegeben: SWS $\rightarrow$ Kosinussatz

Ansatz:

$b^2 = 16^2 + 21^2 - 2 \cdot 16 \cdot 21 \cdot \cos 40°$

Bestimme dann β mit dem Sinus- oder dem Kosinussatz.
$(\text{Ergebnisse: } b = 13{,}50 \text{ cm}; \beta = 49{,}63°)$

c) Gegeben: WSW $\rightarrow$ Sinussatz mithilfe der Winkelsumme

Ansatz:

Bestimme zunächst γ mithilfe der Winkelsumme:

$\gamma = 180° - 75° - 25° = 80°$

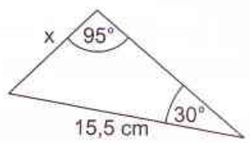
Sinussatz:

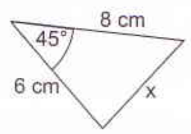
$$\frac{210}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 75^\circ}$$

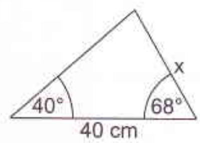
(Ergebnis: $x = 205{,}97$ m)

Aufgaben

126 Berechne die Länge der Strecke x.

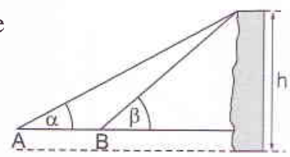
a) 

b) 

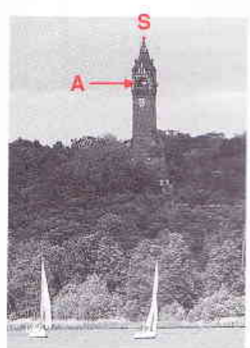
c) 

127 Stelle den Kosinussatz schrittweise nach $\cos \alpha$ um.

128 Zur Bestimmung der Höhe h einer Kletterwand werden mithilfe eines Messgeräts 2 Winkel gemessen. Das Messgerät steht 1,60 m über dem waagerechten Erdboden.
Strecke $\overline{AB} = 10$ m; Winkel $\alpha = 42{,}4°$; $\beta = 65{,}6°$



129 Der Grunewaldturm steht auf dem Karlsberg am Ostufer der Havel. Die Aussichtsplattform A auf einer Turmhöhe von 36 m liegt 100 m über dem Wasserspiegel. Von einem Segelboot aus peilt man die Turmspitze S unter einem Höhenwinkel von 11,2° und die Aussichtsplattform A unter einem Höhenwinkel von 9,5° an. Die Luftlinie zwischen dem Segelboot und der Turmspitze S beträgt 612 m.
Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Grunewaldturms. Vernachlässige dabei den Höhenunterschied vom Messpunkt im Boot zum Wasserspiegel.



130 Einmal im Jahr findet der Schwimmwettkampf „Internationales Müggelseeschwimmen" statt. Ein Schwimmverein möchte dafür trainieren und steckt sich eine Trainingsstrecke ab (siehe Zeichnung). Start und Ziel ist das Strandbad Müggelsee (S). Die Schwimmer müssen um die Bojen A und B herumschwimmen.
Folgende Maße sind bekannt: Winkel SBA = 56°, Winkel BAS = 96°, $\overline{BS} = 1\,200$ m.
Entspricht die Länge dieser Schwimmstrecke ($S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S$) der Wettkampflänge von 2,6 km?

6.3 Sinus und Kosinus im Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis, in dem der Radius die Maßzahl 1 (r = 1) hat und dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt.
Zeichnet man einen Radius in den Einheitskreis, der mit der x-Achse den Winkel α einschließt, so entstehen durch Fällen eines Lotes auf die x-Achse rechtwinklige Dreiecke. Alle diese Dreiecke haben folgende besondere Eigenschaften:

- Die Hypotenuse (Radius) hat immer die Länge 1.
- Die Gegenkathete des Winkels α entspricht dem Sinuswert von α.
- Die Ankathete des Winkels α entspricht dem Kosinuswert von α.

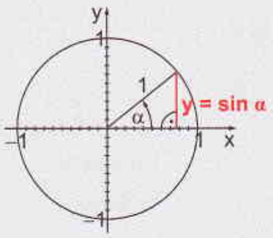
Merke

Sinus und Kosinus im Einheitskreis

Es gilt:

allgemein: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

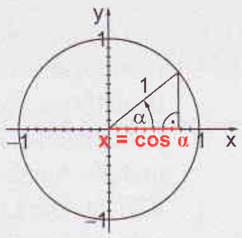
im Einheitskreis: $\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$



Es gilt:

allgemein: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

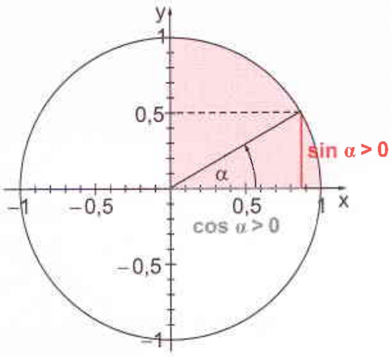
im Einheitskreis: $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$



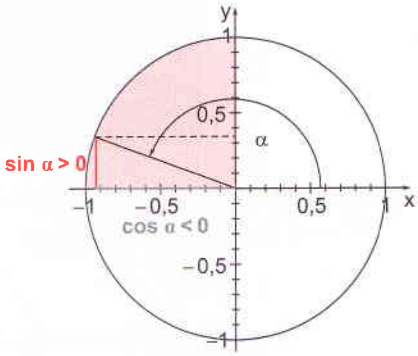
Im Einheitskreis kann man den **Sinuswert** des Winkels α direkt an der **y-Achse** ablesen, den **Kosinuswert** des Winkels α kann man direkt an der **x-Achse** ablesen.

Beispiele

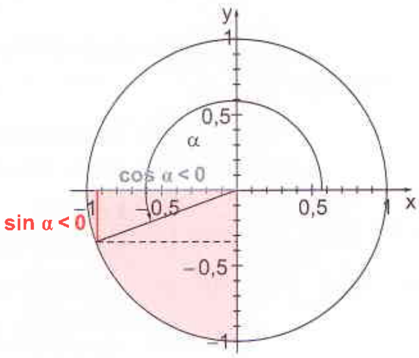
1. Winkel zwischen 0° und 90°:
   Vorzeichen der Sinuswerte: +
   Vorzeichen der Kosinuswerte: +



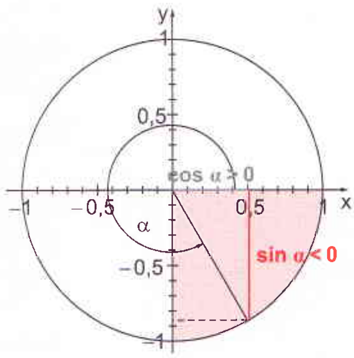
2. Winkel zwischen 90° und 180°:
   Vorzeichen der Sinuswerte: +
   Vorzeichen der Kosinuswerte: –



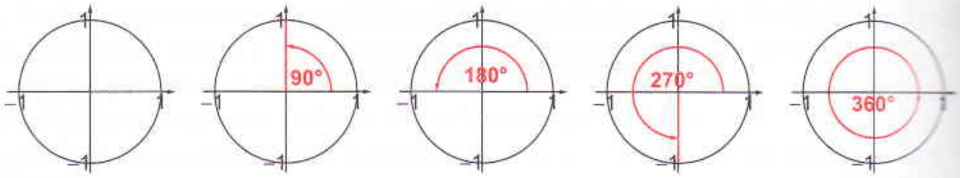
3. Winkel zwischen 180° und 270°:
   Vorzeichen der Sinuswerte: –
   Vorzeichen der Kosinuswerte: –



4. Winkel zwischen 270° und 360°:
   Vorzeichen der Sinuswerte: –
   Vorzeichen der Kosinuswerte: +



5. $\alpha = 0°$ $\alpha = 90°$ $\alpha = 180°$ $\alpha = 270°$ $\alpha = 360°$

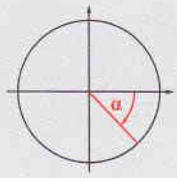


$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$	$\alpha = 270°$	$\alpha = 360°$
$\sin 0° = 0$	$\sin 90° = 1$	$\sin 180° = 0$	$\sin 270° = -1$	$\sin 360° = 0$
$\cos 0° = 1$	$\cos 90° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\cos 270° = 0$	$\cos 360° = 1$

Merke

Winkel mit negativem Vorzeichen

Öffnet sich ein Winkel **mit dem Uhrzeigersinn**, so erhält der Winkel ein **negatives** Vorzeichen.

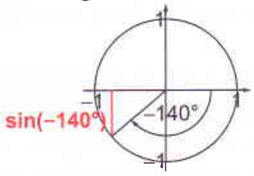


$\alpha = -50°$

Beispiele

1. Bestimme am Einheitskreis: $\sin(-140°)$.

   Lösung:

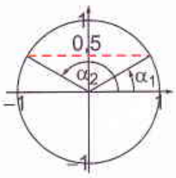


   $\sin(-140°) \approx -0{,}6$

2. Bestimme mithilfe des Einheitskreises alle Winkel zwischen $-360°$ und $+360°$, deren Sinuswert 0,5 ist.

   Lösung:

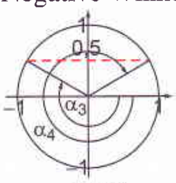
   Positive Winkel:



   $\alpha_1 \approx 30°$
   $\alpha_2 \approx 150°$

   - Zeichne eine Parallele zur x-Achse mit dem Achsenabschnitt $n = 0{,}5$.
   - Die Schnittpunkte mit dem Einheitskreis sind die Endpunkte des freien Schenkels der gesuchten Winkel.
   - Miss die Winkel mit dem Geodreieck.

   Negative Winkel:



   $\alpha_3 \approx -210°$
   $\alpha_4 \approx -330°$

   Gehe vor wie bei den positiven Winkeln, miss die Winkel jedoch diesmal mit dem Uhrzeigersinn.

Merke

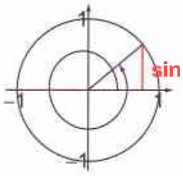
Winkel mit gleichen Funktionswerten

$\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$
$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$

Beispiele

Bestimme den Sinuswert von 400°.

Lösung:
$\sin(400°) = \sin(40° + 360°) = \sin(40°) \approx 0{,}64$



Aufgaben

131 Zeichne einen Einheitskreis (2,5 cm ≙ Einheit 1).
Zeichne folgende Winkel ein und bestimme durch Ablesen ihren Sinus- und Kosinuswert.
a) $\alpha = 65°$ b) $\beta = 100°$ c) $\gamma = 200°$ d) $\delta = -70°$
Überprüfe deine Lösungen mit dem Taschenrechner.

132 Welcher Winkel zwischen 0° und 360° hat denselben Sinuswert wie:
a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 100°$ c) $\alpha = 230°$ d) $\alpha = -210°$

133 Welcher Winkel zwischen 0° und 360° hat denselben Kosinuswert wie:
a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 100°$ c) $\alpha = 230°$ d) $\alpha = -210°$

134 Gleich oder nicht gleich? Setze = oder ≠ ein.
Überlege und benutze nicht den Taschenrechner.
a) $\sin 15° \square \sin 165°$ b) $\cos 40° \square \cos 220°$ c) $\sin 90° \square \sin(-90°)$
d) $\sin(-180°) \square \sin 180°$ e) $\cos 60° \square \cos(-60°)$ f) $\sin 200° \square \sin(-20°)$