4 Ähnlichkeit und Strahlensätze

4.1 Maßstab

Merke

Maßstab

Der **Maßstab k** einer Zeichnung oder Landkarte gibt das **Verhältnis von Bildgröße** (Länge in der Zeichnung) **zu Originalgröße** (Länge in Wirklichkeit) an. Bildgröße und Originalgröße müssen dieselbe Einheit haben.

$$\text{Maßstab } k = \text{Bild} : \text{Original} = \frac{\text{Bild}}{\text{Original}}$$

Der Maßstab k kann auch als Quotient oder Dezimalbruch angegeben werden.

Für den Maßstab k gilt:
$0 < k < 1$: maßstäbliche Verkleinerung
$k = 1$: identische Abbildung
$k > 1$: maßstäbliche Vergrößerung

Beispiele

1. a) Maßstab 1 : 2 500
Verkleinerung: 1 cm im Bild ≙ 2 500 cm in Wirklichkeit
Der Maßstab kann auch als Bruch oder Dezimalbruch angegeben werden:
$$k = 1 : 2\,500 = \frac{1}{2\,500} = 0{,}0004$$
b) Maßstab 3 : 2
Vergrößerung: 3 cm im Bild ≙ 2 cm in Wirklichkeit
Der Maßstab kann auch als Bruch oder Dezimalbruch angegeben werden:
$$k = 3 : 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

2. Auf einem Stadtplan von Berlin wird ein Maßstab von 1 : 27 000 angegeben. Zwischen Theodor-Heuss-Platz und dem Berliner Dom verläuft eine gerade Straße, die auf dem Stadtplan 34 cm misst. Wie lang ist die Entfernung in Wirklichkeit?
Lösung:
Maßstab 1 : 27 000 bedeutet: 1 cm im Stadtplan ≙ 27 000 cm in Wirklichkeit
Berechnung der Länge der Originalstrecke x, wenn die Länge der Bildstrecke (34 cm) und der Maßstab (1 : 27 000) gegeben sind:
$$1 : 27\,000 = 34 : x$$
$$\frac{1}{27\,000} = \frac{34}{x} \quad \Big| \cdot x \;\; \cdot 27\,000$$
$$x = 34 \cdot 27\,000$$
$$x = 918\,000$$
Die Entfernung beträgt in Wirklichkeit 918 000 cm = 9 180 m = 9,18 km.

3. Der Maßstab einer Wanderkarte beträgt 1 : 30 000. Lucas Vater plant eine Wanderung von 12 km Länge. Luca misst auf der Wanderkarte 40 cm. Kann das stimmen?
Lösung:
Da die Strecken in unterschiedlichen Einheiten angegeben sind, muss zunächst umgerechnet werden: 12 km = 12 000 m = 1 200 000 cm

Berechnung der Länge der Bildstrecke x, wenn die Länge der Originalstrecke (1 200 000 cm) und der Maßstab (1 : 30 000) gegeben sind:

$1:30\,000 = x:1\,200\,000$

$$\frac{1}{30\,000} = \frac{x}{1\,200\,000} \qquad \Big|\cdot 1\,200\,000$$

$$\frac{1\,200\,000}{30\,000} = x$$

$$x = 40$$

Der 12 km langen Wanderstrecke entspricht eine 40 cm lange Strecke in der Karte. Lucas Messung war also richtig.

oder

Berechnung der Länge der Originalstrecke x, wenn die Länge der Bildstrecke (40 cm) und der Maßstab (1 : 30 000) gegeben sind:

$1:30\,000 = 40:x$

$$\frac{1}{30\,000} = \frac{40}{x} \qquad \Big|\begin{array}{l}\cdot x\\ \cdot 30\,000\end{array}$$

$$x = 40\cdot 30\,000$$

$$x = 1\,200\,000$$

Die 40 cm lange Strecke auf der Karte entspricht einer 1 200 000 cm = 12 km langen Strecke in Wirklichkeit. Lucas Messung war also richtig.

oder

Überprüfung, ob der über Bildstrecke (40 cm) und Originalstrecke (1 200 000 cm) berechnete Maßstab mit dem gegebenen Maßstab 1 : 30 000 übereinstimmt:

$1:30\,000 \overset{?}{=} 40:1\,200\,000$

$$\frac{1}{30\,000} \overset{?}{=} \frac{40}{1\,200\,000}$$

$0{,}000033 = 0{,}000033$

Lucas Messung war richtig.

Aufgaben

105 Eine 3 cm lange Strecke auf einer Karte entspricht in Wirklichkeit 6 km. Welchen Maßstab hat die Karte?

106 Ordne den Beispielen jeweils einen der gegebenen Maßstäbe zu.

A 1 : 100 000	B 1 : 10 000	C 1 : 5 000	D 1 : 2 000
E 1 : 1 000	F 1 : 500	G 1 : 200	H 1 : 100

a) Länge einer Joggingstrecke
Original: 5 km Bild: 5 cm

b) Länge einer Tempo-30-Zone vor einer Schule
Original: 200 m Bild: 4 cm

c) Höhe des Weihnachtsbaums am Gendarmenmarkt
Original: 25 m Bild: 5 cm

d) Durchmesser des Tiergartentunnels
Original: 9 m Bild: 45 mm

4.2 Vergrößern und Verkleinern von Figuren

Maßstabgerechte Vergrößerungen und Verkleinerungen wie zum Beispiel Wohnungsgrundrisse, Modellflugzeuge oder Overhead-Projektionen spielen im Alltag eine bedeutsame Rolle. Hierbei ändert sich die Größe der Figur, jedoch nicht die Form.
Original- und Bildfigur sind zueinander **ähnliche Figuren**. Bei ähnlichen Figuren bleiben neben Winkelgrößen und Streckenverhältnissen auch Parallelitäten und Umlaufsinn erhalten.

Ähnliche Figuren können beispielsweise durch zentrische Streckungen entstehen.

Merke

Zentrische Streckung

Die **zentrische Streckung** ist eine Abbildung, die eine **Figur** mithilfe eines **Streckungszentrums Z** und eines **Streckungsfaktors k** maßstäblich **vergrößert** oder **verkleinert**. Das Zentrum kann dafür beliebig gewählt werden.

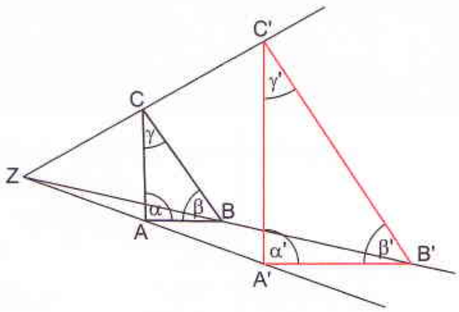
Zu jedem Punkt P der Originalfigur erhält man folgendermaßen den zugehörigen Bildpunkt P' der Bildfigur:
- Verbinde die Punkte P und Z und miss die Länge der Strecke $\overline{ZP}$.
- Trage von Z aus die Länge der Strecke $\overline{ZP'} = \overline{ZP} \cdot k$ auf der Geraden ZP ab, um den Bildpunkt P' zu erhalten.

Beispiele

1. k = 2 **Vergrößerung**

   Die Strecken im Bilddreieck A'B'C' sind doppelt so lang wie die Strecken im Originaldreieck ABC.

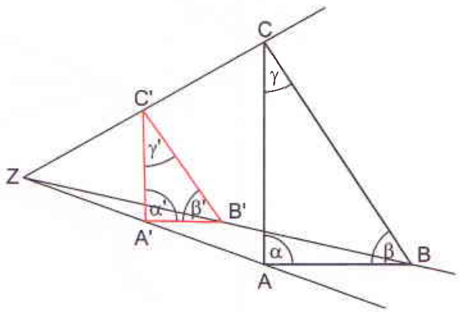
   Die entsprechenden Winkel sind gleich groß:
   $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$



2. $k = \frac{1}{2}$ **Verkleinerung**

   Die Strecken im Bilddreieck A'B'C' sind halb so lang wie die Strecken im Originaldreieck ABC.

   Die entsprechenden Winkel sind gleich groß:
   $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$



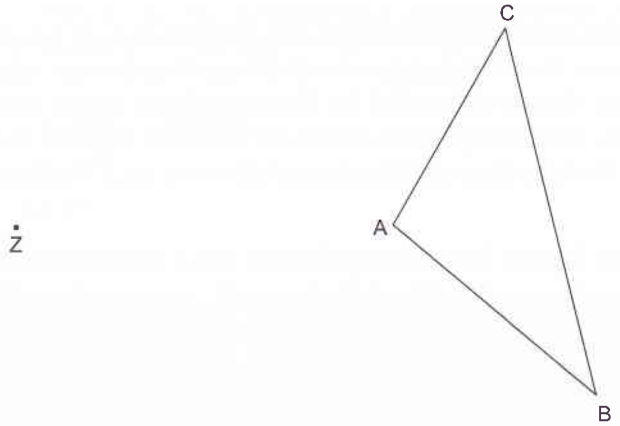
Merke

Der **Streckungsfaktor k** entspricht dem **Maßstab als Bruch bzw. in Dezimaldarstellung**:

$$k = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Originalgröße}}$$

Beispiele

1. Verkleinere das Dreieck ABC im Maßstab 1 : 2 mit Zentrum Z.



Lösung:

Streckungsfaktor: $k = 1:2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (Verkleinerung)

Die Verbindungslinien zwischen Z und den Dreieckspunkten A, B, C werden gezeichnet und die Längen gemessen: $\overline{ZA} = 5$ cm; $\overline{ZB} = 8$ cm; $\overline{ZC} = 7$ cm

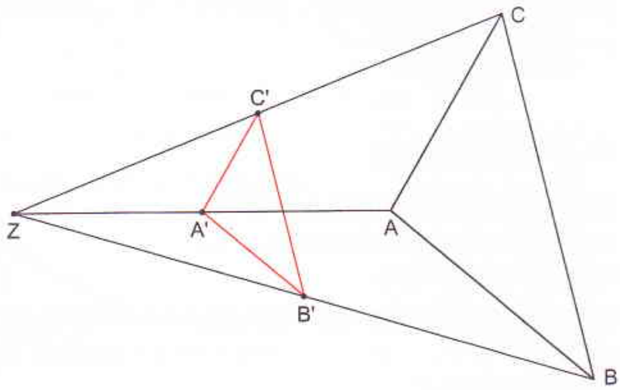
Berechnung der Abstände der Bildpunkte A', B' und C' zum Zentrum Z durch Multiplikation mit dem Faktor k:

$\overline{ZA'} = \overline{ZA} \cdot k = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

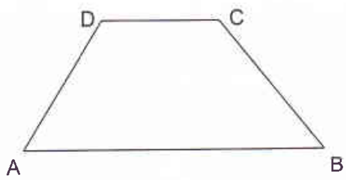
$\overline{ZB'} = \overline{ZB} \cdot k = 8 \cdot 0{,}5 = 4$

$\overline{ZC'} = \overline{ZC} \cdot k = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

Trage die Strecken $\overline{ZA'}$, $\overline{ZB'}$ und $\overline{ZC'}$ von Z aus auf den Geraden ZA, ZB und ZC ab. Verbinde dann die so erhaltenen Bildpunkte A', B' und C'.



2. Vergrößere das Trapez ABCD im Maßstab 3 : 2 mit Zentrum Z = A.



Lösung:

Streckungsfaktor: $k = 3:2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (Vergrößerung)

Die Verbindungslinien zwischen A und den Punkten B, C und D werden gezeichnet und die Längen gemessen: $\overline{AB} = 4$ cm; $\overline{AC} = 3{,}1$ cm; $\overline{AD} = 2$ cm

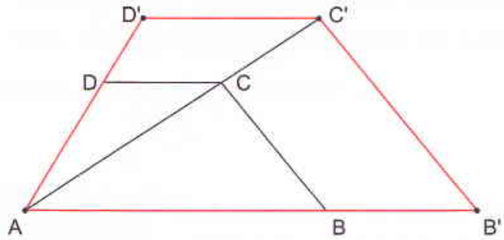
Berechnung der Abstände der Bildpunkte zum Zentrum A:
Der Punkt A ist ein Fixpunkt und ist damit gleichzeitig A'.

$\overline{AB'} = \overline{AB} \cdot k = 4 \cdot 1{,}5 = 6$

$\overline{AC'} = \overline{AC} \cdot k = 3{,}1 \cdot 1{,}5 = 4{,}65$

$\overline{AD'} = \overline{AD} \cdot k = 2 \cdot 1{,}5 = 3$

Die Bildpunkte A', B', C' und D' werden miteinander verbunden.



Merke

Veränderung des Flächeninhaltes bei der zentrischen Streckung

Wird eine Fläche mit dem Faktor k vergrößert oder verkleinert, so ändert sich ihr Flächeninhalt A um den Faktor k^2:
$A' = k^2 \cdot A$

Beispiel

In einem Rechteck ist die kürzere Seite 2,8 cm lang. Der Flächeninhalt beträgt 11,2 cm^2. In der Bildfigur ist die kürzere Seite 14 cm lang.
Welchen Flächeninhalt hat die Bildfigur?

Lösung:

Berechnung der fehlenden Seite b der Originalfigur:

$A = a \cdot b$

$11{,}2 = 2{,}8 \cdot b \quad |:2{,}8$

$\frac{11{,}2}{2{,}8} = b$

$b = 4$

Berechnung des Streckungsfaktors k:

$k = \frac{\text{Bild}}{\text{Original}}$

$k = \frac{14}{2{,}8}$

$k = 5$

Berechnung des Flächeninhaltes A' der Bildfigur:
Der Flächeninhalt der Originalfigur A wird mit dem Faktor k^2 multipliziert.

$A' = k^2 \cdot A$

$A' = 5^2 \cdot 11{,}2$

$A' = 280$

Der Flächeninhalt der Bildfigur beträgt 280 cm^2.

oder

Berechnung der Seitenlänge b' der Bildfigur mithilfe von b und k:

$b' = k \cdot b$

$b' = 5 \cdot 4$

$b' = 20$

Berechnung des Flächeninhaltes A' der Bildfigur:

$A' = a' \cdot b'$

$A' = 14 \cdot 20$

$A' = 280$

Der Flächeninhalt der Bildfigur beträgt 280 cm^2.

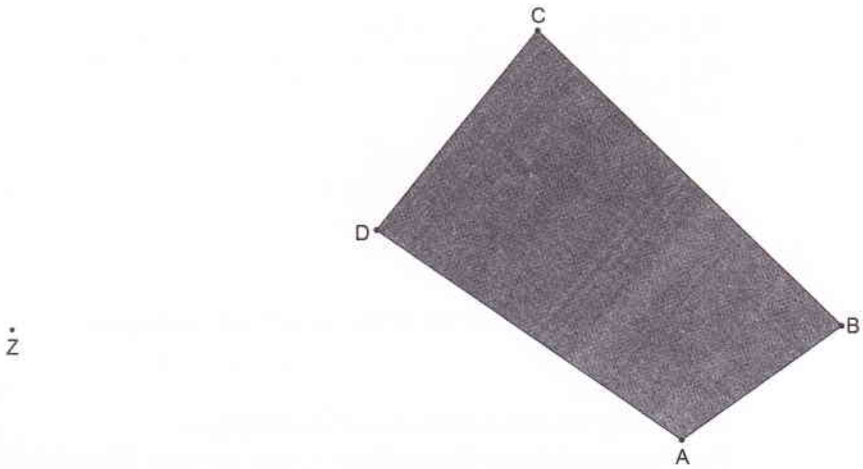
Aufgaben

107 Das Brandenburger Tor ist 21 m hoch, 65,5 m breit, 11 m tief und wird durch eine 5 m hohe Skulptur, die Quadriga, gekrönt.
Im Kunstunterricht wird ein Modell des Brandenburger Tors im Maßstab 1 : 25 gefertigt.

a) Wo könnte das Modell aufgestellt werden? Begründe durch eine Rechnung.
   A: auf einem Schultisch
   B: in der Aula
   C: in einer 1,50 m breiten Glasvitrine

b) Welcher Maßstab muss gewählt werden, damit das Modell eine Höhe von 20 cm hat?

108 Das Kupferplättchen muss im Verhältnis 2 : 5 verkleinert werden.
Konstruiere die Verkleinerung von Z aus.



109 Marei hat auf dem letzten Wandertag ein schönes Klassenfoto im Format 10 cm × 15 cm aufgenommen, das sie vergrößert im Klassenraum aufhängen möchte. Sie stellt auf dem Kopierer eine Vergrößerung von 200 % ein. Das bedeutet, dass die vergrößerten Seitenlängen 200 % der ursprünglichen Seitenlängen haben.

a) Sind die folgenden Aussagen mathematisch korrekt formuliert (wahr) oder nicht (falsch)? Kreuze jeweils an.

	wahr	falsch
1. Es wird mit dem Maßstab 200 : 1 vergrößert.	☐	☐
2. Eine Seite des vergrößerten Fotos ist 30 cm lang.	☐	☐
3. Die Fläche des vergrößerten Fotos ist viermal so groß wie vorher.	☐	☐
4. Das vergrößerte Foto passt in einen Bilderrahmen, der die Maße 180 mm × 300 mm hat.	☐	☐

b) Begründe **eine** deiner Entscheidungen.

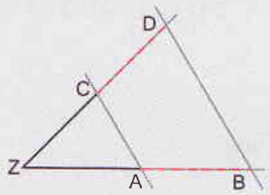
4.3 Strahlensätze

Merke

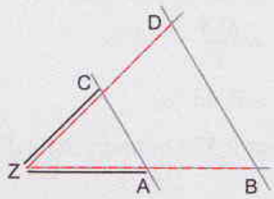
Strahlensätze

Werden zwei Strahlen mit demselben Anfangspunkt von zwei parallelen Geraden geschnitten, so gelten folgende Verhältnisse:

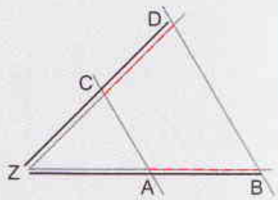
1. Die Längen der Strecken auf dem einen Strahl verhalten sich zueinander wie die Längen der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl.



$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$$

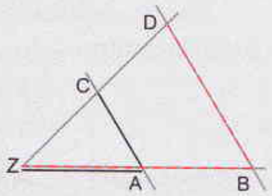


$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$$

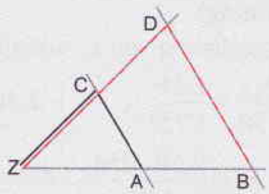


$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{CD}}$$

2. Die Längen der Strecken auf den Parallelen verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf einem der beiden Strahlen, ausgehend vom Scheitelpunkt Z.



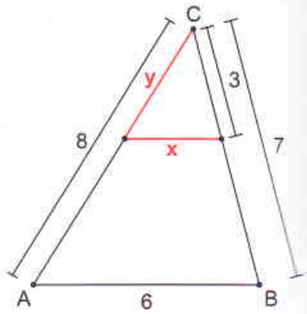
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$



$$\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

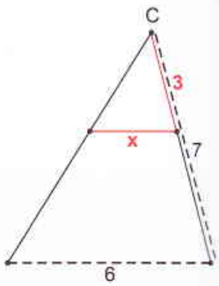
Beispiele

1. Berechne die Längen der beiden Strecken x und y. Alle Maße sind in cm gegeben.



Lösung:

Berechnung von x mithilfe des 2. Strahlensatzes (mit dem Scheitelpunkt C):

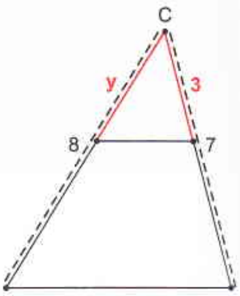


$$\frac{3}{7} = \frac{x}{6} \quad | \cdot 6$$

$$x = \frac{3 \cdot 6}{7}$$

$$x \approx 2{,}57$$

Berechnung von y mithilfe des 1. Strahlensatzes (mit dem Scheitelpunkt C):



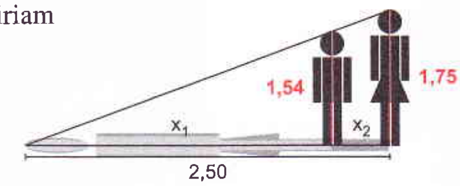
$$\frac{y}{8} = \frac{3}{7} \quad | \cdot 8$$

$$y = \frac{3 \cdot 8}{7}$$

$$y \approx 3{,}43$$

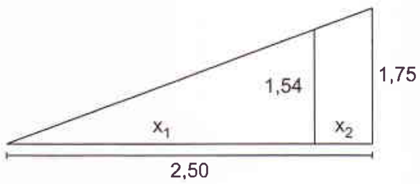
x ist 2,57 cm und y ist 3,43 cm lang.

2. Miriam ist 1,75 m und Jan 1,54 m groß. Miriam wirft einen Schatten von 2,50 m Länge. In welcher Entfernung muss Jan sich vor Miriam aufstellen, damit beide Schatten in einem Punkt enden?



Lösung:

Berechnung von x_1 mithilfe des 2. Strahlensatzes:



$$\frac{x_1}{2{,}50} = \frac{1{,}54}{1{,}75} \quad | \cdot 2{,}50$$

$$x_1 = \frac{2{,}50 \cdot 1{,}54}{1{,}75}$$

$$x_1 = 2{,}20$$

Berechnung von x_2:

$$x_2 = 2{,}50 - x_1$$

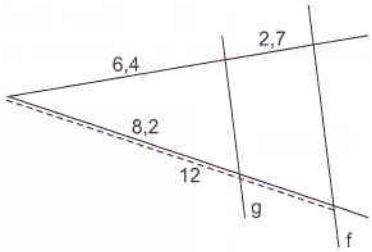
$$x_2 = 2{,}50 - 2{,}20$$

$$x_2 = 0{,}30$$

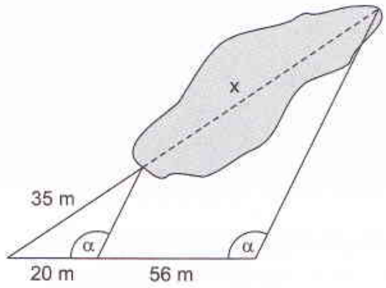
Jan muss sich 30 cm vor Miriam aufstellen.

Aufgaben

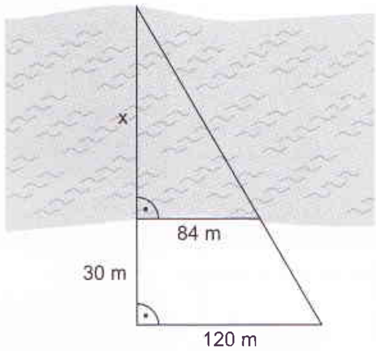
110 Prüfe, ob die angegebenen Maße stimmen.



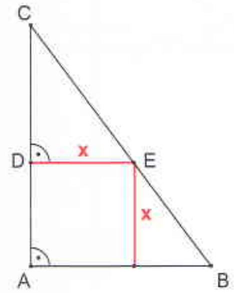
111 a) Wie lang ist der abgebildete See?



b) Wie breit ist der Fluss?



112 Berechne die Länge der Strecke x in der nebenstehenden Zeichnung, wenn gilt:
$\overline{AB} = 12$ cm; $\overline{CA} = 18$ cm



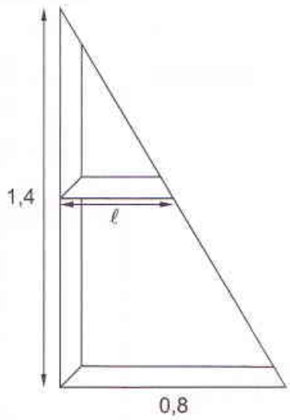
113 Tim will in die Nische einer Dachschräge, die 1,4 m hoch und am Boden 80 cm breit ist, auf halber Höhe einen Zwischenboden aus Glas einbauen. Er findet beim Glaser vier Scheiben unterschiedlicher Länge.

Glasboden

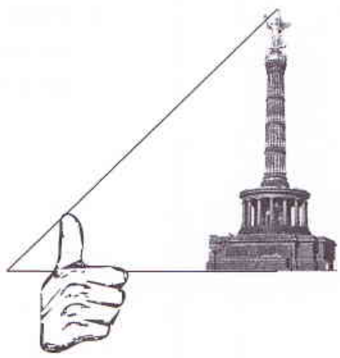
A: 30 cm B: 35 cm
C: 40 cm D: 45 cm

a) Welchen Glasboden muss er kaufen?

b) In welcher Höhe müsste er einen 50 cm langen Glasboden einsetzen?



114 Ismail peilt die 69 m hohe Siegessäule über seinen 5 cm langen Daumen an. Der Daumen ist 60 cm von seinen Augen entfernt. Wie weit ist er von der Siegessäule entfernt?



5 Der Satz des Pythagoras

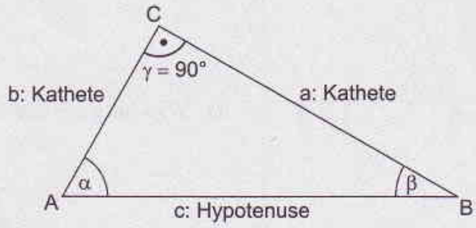
Merke

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel (=90°) heißt **rechtwinkliges Dreieck**.

Die Dreiecksseite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt **Hypotenuse**. Die Hypotenuse ist die **längste Seite**.

Die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, werden als **Katheten** bezeichnet.



In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras.

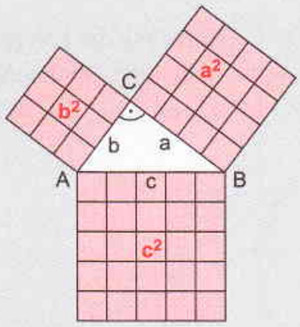
Merke

Der Satz des Pythagoras

Das **Quadrat über der Hypotenuse** eines rechtwinkligen Dreiecks hat den **gleichen Flächeninhalt** wie die **Quadrate über den Katheten zusammen**.

$c^2 = a^2 + b^2$

Es gilt auch umgekehrt:
Gilt in einem Dreieck der **Satz des Pythagoras**, so ist das **Dreieck rechtwinklig.**



Beispiele

1. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Hypotenuse c = 13 cm und die Kathete a = 5 cm. Bestimme die Länge der Kathete b.

   Lösung:

   $c^2 = a^2 + b^2$ Satz des Pythagoras
   $13^2 = 5^2 + b^2 \quad | -5^2$ Werte für a und c einsetzen
   $b^2 = 13^2 - 5^2$
   $b^2 = 169 - 25$
   $b^2 = 144 \quad | \sqrt{\ }$
   $b = 12$

   Die Kathete b ist 12 cm lang.

2. Prüfe durch Rechnung, ob das Dreieck rechtwinklig ist:
   a) a = 8 cm; b = 6 cm; c = 10 cm
   b) a = 6,5 cm; b = 13,5 cm; c = 11 cm

Lösung:

a) Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, ist c als längste Seite die Hypotenuse.

$$c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$$
$$10^2 \stackrel{?}{=} 8^2 + 6^2$$
$$100 \stackrel{?}{=} 64 + 36$$
$$100 = 100$$

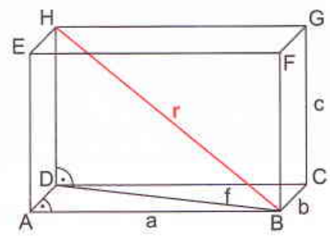
Das Dreieck ist **rechtwinklig**.

b) Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, ist b als längste Seite die Hypotenuse.

$$b^2 \stackrel{?}{=} a^2 + c^2$$
$$13{,}5^2 \stackrel{?}{=} 6{,}5^2 + 11^2$$
$$182{,}25 \stackrel{?}{=} 42{,}25 + 121$$
$$182{,}25 \neq 163{,}25$$

Das Dreieck ist **nicht rechtwinklig**.

3. Berechne die Länge der Raumdiagonale r eines Quaders mit a = 10 cm, b = 6 cm und c = 8 cm.



Lösung:

Berechnung der Flächendiagonale f im rechtwinkligen Dreieck ABD:

$f^2 = a^2 + b^2$ Satz des Pythagoras

$f^2 = 10^2 + 6^2$

$f^2 = 100 + 36$

$f^2 = 136 \quad |\sqrt{}$

$f \approx 11{,}66$

Berechnung der Raumdiagonale r im rechtwinkligen Dreieck DBH:

$r^2 = c^2 + f^2$ Satz des Pythagoras

$r^2 = 8^2 + 136$

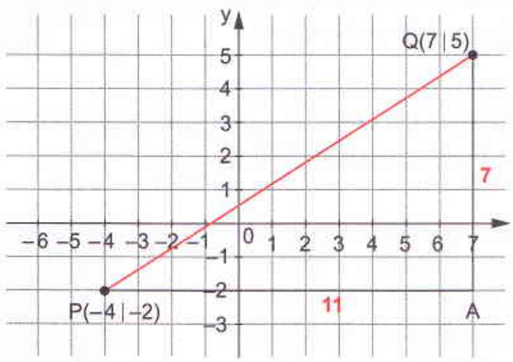
$r^2 = 64 + 136$

$r^2 = 200 \quad |\sqrt{}$

$r \approx 14{,}14$

Die Länge der Raumdiagonale beträgt 14,14 cm.

4. Berechne den Abstand der beiden Punkte P(–4 | –2) und Q(7 | 5).



Lösung:
Im rechtwinkligen Koordinatendreieck PAQ ist $\overline{PQ}$ die Hypotenuse. Die beiden Katheten haben die Längen 7 LE + 4 LE = 11 LE und 5 LE + 2 LE = 7 LE (LE = Längeneinheit).

$\overline{PQ}^2 = 11^2 + 7^2$ Satz des Pythagoras im Koordinatendreieck PAQ

$\overline{PQ}^2 = 121 + 49$

$\overline{PQ}^2 = 170 \quad |\sqrt{\ }$

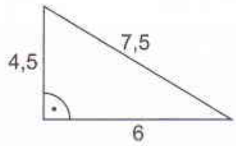
$\overline{PQ} \approx 13{,}04$

Die Punkte P und Q haben einen Abstand von 13,04 Längeneinheiten.

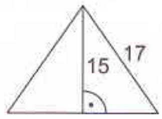
Aufgaben

115 Stimmen die Maße? Überprüfe durch Rechnung.

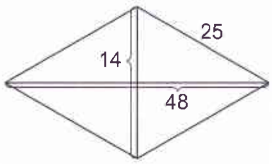
a) Dreieck



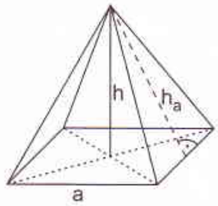
b) Gleichseitiges Dreieck



c) Raute



d) Quadratische Pyramide



116 Es werden Plasma- und LCD-Fernseher mit unterschiedlichen Bildschirmmaßen angeboten. LCD-94 cm bedeutet, dass der Bildschirm eine Diagonale von 94 cm hat. Welche Bildschirmfläche hat ein LCD-94 cm, wenn der Bildschirm 78,9 cm breit ist?

117 Beim Umzug will Mark ein Ölbild mit den Maßen 1,40 m × 1,60 m durch ein 80 cm breites und 1,20 m hohes Fenster reichen. Gelingt es ihm?

118 Bei einem Fußballspiel wird Tom im Strafraum gefoult und es gibt einen Elfmeter. Malte knallt den Ball in einer Höhe von 1,60 m direkt an den Pfosten. Welche Strecke hat der Ball zurückgelegt, wenn das Tor 7,32 m breit und 2,44 m hoch ist und die Flugbahn des Balls geradlinig verläuft? Tipp: Denke räumlich!